Fondements des Bases de données : *contraintes d'intégrité*

M1 - Informatique

Lhouari Nourine, Karima Ennaoui et *Simon Vilmin*.

Institut d'informatique, ISIMA

2020-2021

Slides inspirées du cours de Jean-Marc Petit :
`https://perso.liris.cnrs.fr/jmpetit/ferme/doku.php/teaching`

Les contraintes d'intégrité

- L'idée de base est de fournir des moyens qui permettent de restreindre les données *« valides »* d'une base de données.
- La mise en œuvre de cette notion se fait via des *contraintes d'intégrité* : *« déclarations logiques qui permettent de restreindre le domaine actif d'une base de données »*.
- On ne peut pas faire n'importe quoi :
  - deux livres ne peuvent pas avoir le même ISBN (idée de *clé*),
  - on ne peut pas attribuer une œuvre à un auteur qui n'existe pas.

Dépendances fonctionnelles (DF)

Avec les mains :

- Modélisation **simple** et **logique** de relations entre des attributs/caractéristiques d'un univers, d'un problème.
- Généralise la notion de *clé*.
- Permet de restreindre (contraindre !) formellement les schémas de relation acceptables ou non : ceux pour lesquels ils n'existent pas d'*anomalies*.
- Si une relation a des anomalies, garder la BD correcte est difficile pour le SGBD qui ne gère que les clés.
- Donc, on fait de la *normalisation* à partir des DF : **idéalement**, on *« découpe »* une relation en pleins de petits morceaux pour n'avoir que des clés dans chacun des morceaux. (on verra ça plus tard)

Exemple

- Soit $\mathcal{U} = \{\text{Article}, \text{Session}, \text{Organisateur}\}$. On considère deux schémas :
  - $R_1 = \text{Conférence}$ avec $\textit{schema}(\text{Conférence}) = \mathcal{U}$,
  - $R_2 = \{\text{RelArticle}, \text{RelSession}\}$ avec $\textit{schema}(\text{RelArticle}) = \{Article, Session\}$ et $\textit{schema}(\text{RelSession}) = \{Session, Organisateur\}$
- Voici des FDs : $Article \longrightarrow Session$, $Session \longrightarrow Organisateur$

Article	Session	Organisateur
1	Matin	Etno
2	Matin	Etno
3	Soir	Gorgious
4	Soir	Gorgious
5	Jamais	Etno

Article	Session
1	Matin
2	Matin
3	Soir
4	Soir
5	Jamais

Session	Organisateur
Matin	Etno
Soir	Gorgious
Jamais	Etno

TABLE – Un exemple de BD sur R_1 (gauche) et R_2 (droite)

Anomalie d'insertion

Article	Session	Organisateur
1	Matin	Etno
2	Matin	Etno
3	Soir	Gorgious
4	Soir	Gorgious
5	Jamais	Etno

Article	Session
1	Matin
2	Matin
3	Soir
4	Soir
5	Jamais

Session	Organisateur
Matin	Etno
Soir	Gorgious
Jamais	Etno

TABLE – Des exemples de BD sur R_1 (gauche) et R_2 (droite)

- ▸ Bud veut organiser une nouvelle session Nuit, mais sans avoir d'articles à y proposer pour le moment.
- ✗ Dans R_1, on ne peut pas ajouter la session Nuit sans y ajouter un article, il *manque des informations*.
- ✓ Pour R_2, On peut simplement ajouter une nouvelle session Nuit, organisée par Bud.

Anomalie de suppression

Article	Session	Organisateur
1	Matin	Etno
2	Matin	Etno
3	Soir	Gorgious
4	Soir	Gorgious
5	Jamais	Etno

Article	Session
1	Matin
2	Matin
3	Soir
4	Soir
5	Jamais

Session	Organisateur
Matin	Etno
Soir	Gorgious
Jamais	Etno

TABLE – Des exemples de BD sur R_1 (gauche) et R_2 (droite)

- Finalement, l'article 5 est retiré de la conférence.

✗ Dans R_1, en supprimant l'article 5, on va *aussi supprimer* les informations de la session Jamais.

✓ Pour R_2, On peut supprimer l'article 5 *sans faire disparaître* la Session.

Anomalie de mise-à-jour

Article	Session	Organisateur
1	Matin	Etno
2	Matin	Etno
3	Soir	Gorgious
4	Soir	Gorgious
5	Jamais	Etno

Article	Session
1	Matin
2	Matin
3	Soir
4	Soir
5	Jamais

Session	Organisateur
Matin	Etno
Soir	Gorgious
Jamais	Etno

TABLE – Des exemples de BD sur R_1 (gauche) et R_2 (droite)

- ▶ Catastrophe ! Gorgious est malade (indigestion), mais Candy peut le remplacer.
- ✗ Dans R_1, on va devoir modifier *plusieurs tuples* pour respecter les contraintes.
- ✓ Pour R_2, il suffit de changer *uniquement* le tuple du Soir dans RelSession.

Redondance

Article	Session	Organisateur
1	Matin	Etno
2	Matin	Etno
3	Soir	Gorgious
4	Soir	Gorgious
5	Jamais	Etno

Article	Session
1	Matin
2	Matin
3	Soir
4	Soir
5	Jamais

Session	Organisateur
Matin	Etno
Soir	Gorgious
Jamais	Etno

TABLE – Des exemples de BD sur R_1 (gauche) et R_2 (droite)

✗ Dans R_1, le fait que Etno organise la session du matin apparaît *plusieurs fois*.

✓ Dans R_2, ça n'est représenté qu'*une fois* dans la table RelSession.

Syntaxe et sémantique des DF

Définition - (Syntaxe)

Soit R un schéma de relation. Une *dépendance fonctionnelle* (DF) sur R est une règle de la forme R: $X \rightarrow Y$ avec $X, Y \subseteq$ R.

Définition - Satisfaction (Sémantique)

Soit r une relation sur R. Une DF R: $X \rightarrow Y$ est *satisfaite* par r, noté $r \models X \rightarrow Y$, si pour tout $t_1, t_2 \in r$ si $t_1[X] = t_2[X]$ alors $t_1[Y] = t_2[Y]$.

Quelques facilités scénaristiques :

- On confond R (le nom) avec *schema*(R) (les attributs).
- On note souvent $X \rightarrow Y$ au lieu de R: $X \rightarrow Y$, par simplicité.
- Dans la suite, Σ représente un ensemble de DF.

Exemple

Pays	Titre	Auteur	Année
Russie	Stalker	Tarkovski	1979
Chine	Les Éternels	Zhangke	2018
France	Princes et Princesses	Ocelot	2000
États-Unis	Solaris	Soderbergh	2002
Russie	Solaris	Tarkovski	1972
États-Unis	Alien	Scott	1979

TABLE – une relation Film

- Film est une relation sur $R = \{\text{Pays}, \text{Titre}, \text{Auteur}, \text{Année}\}$,
- Les expressions Titre $\rightarrow$ Auteur et $\{\text{Auteur}, \text{Titre}\} \rightarrow \{\text{Pays}, \text{Année}\}$ sont des DF :
  - Titre $\rightarrow$ Auteur n'est *pas satisfaite* par r : les deux tuples avec Solaris sont un contre-exemple !
  - $\{\text{Auteur}, \text{Titre}\} \rightarrow \{\text{Pays}, \text{Année}\}$ est *satisfaite* par r.

Aparté

- L'idée d'implication derrière les FDs dépasse largement la BD :
  - règles d'association en fouilles de données,
  - implications d'attributs en Analyse Formelle de Concepts,
  - clauses de Horn en logique.
- *Pourquoi* ? Modélise l'idée de cause à effet, de propagation.
- Quelques illustrations possibles de la signification de $X \rightarrow Y$:
  - *« À chaque fois qu'une personne a acheté les produits X, elle a aussi acheté les produits Y. »* (fouille de données),
  - *« Si je connais les valeurs des attributs sur X, alors je connais les valeurs sur Y. »* (DF),
  - *« À chaque fois que j'ai X, je dois aussi avoir Y. »* (plus général).

Implication Logique

- Petit exemple :
  - Soit $\Sigma = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$. Intuitivement, si A implique B et B implique C, on déduit aussi que A implique C, soit $A \rightarrow C$.
  - Donc, $\Sigma = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ et $\Sigma' = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C, A \rightarrow BC\}$ représentent la *même information*, ils sont *équivalents*.
  - Pourtant, ils sont différents ! Mais, on peut *déduire* de Σ d'autres FD valides, en particulier celles de Σ'.
- Problème de l'*implication logique* : *« Etant donnés un ensemble Σ de DF sur* R *et une DF $X \rightarrow Y$ sur* R*, peut-on déduire $X \rightarrow Y$ de Σ ? ».*
- Idée : il faut que quelque soit la relation r sur R vérifiant Σ, r vérifie aussi $X \rightarrow Y$.

Implication Logique

Définition - Implication Logique

Soient Σ un ensemble de DF sur R et $X \rightarrow Y$ une DF sur R. Σ implique $X \rightarrow Y$, noté $\Sigma \models X \rightarrow Y$, si pour toute relation r sur R, si $r \models \Sigma$, alors $r \models X \rightarrow Y$.

- Deux approches pour résoudre ce problème :
  - *sémantique* via un algorithme, ($\models$)
  - *syntaxique* via la notion de preuve. ($\vdash$)
- Les deux concordent ! ! !
  - $\Sigma \models X \rightarrow Y$ ssi $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$. (on verra ça après)

Fermeture d'un ensemble

- Soit Σ un ensemble de DF sur R, et $X \subseteq \mathsf{R}$.
- On définit $X^\circ = X \cup \{Z \mid \exists Y \to Z \in \Sigma, Y \subseteq X\}$.
- La *fermeture* de X par rapport à Σ, notée X^Σ est définie par

$$X^\Sigma = X^{\circ\circ\circ\cdots}$$

- X^Σ est bien défini, car au pire des cas $X^\Sigma = \mathsf{R}$.
- L'opération $\cdot^\Sigma$ est un *opérateur de fermeture* :
  - $X \subseteq X^\Sigma$, $X \subseteq Y \implies X^\Sigma \subseteq Y^\Sigma$ et $X^{\Sigma\,\Sigma} = X^\Sigma$.
- Algorithme de *forward chaining*.

Algorithme de calcul de fermeture

Algorithme FERMETURE(X, Σ)

```
Data: X ⊆ R ; Σ un ensemble de DF sur R
Result: X^Σ, la fermeture de X par rapport à Σ
X^Σ := X ;
fini := false ;
while not fini do
    fini := true ;
    foreach Y → Z ∈ Σ do
        if Y ⊆ X^Σ and Z ⊈ X^Σ then
            X^Σ := X^Σ ∪ Z ;
            fini := false ;
        end
    end
end
Return(X^Σ)
```

Exemple

- Soit R $= \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \rightarrow E, F \rightarrow C, B \rightarrow D, AB \rightarrow C, ECD \rightarrow F\}$.

$X = AB$

Exemple

- Soit R $= \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \rightarrow E, F \rightarrow C, B \rightarrow D, AB \rightarrow C, ECD \rightarrow F\}$.

$$X = AB \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} A \rightarrow E \\ F \rightarrow C \\ B \rightarrow D \\ AB \rightarrow C \\ ECD \rightarrow F \end{array}$$

While 1

Exemple

- Soit R $= \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \longrightarrow E, F \longrightarrow C, B \longrightarrow D, AB \longrightarrow C, ECD \longrightarrow F\}$.

$X = AB \quad \longrightarrow$

- $A \rightarrow E$

  $F \rightarrow C$

- $B \rightarrow D$
- $AB \rightarrow C$

  $ECD \rightarrow F$

While 1

Exemple

- Soit R $= \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \rightarrow E, F \rightarrow C, B \rightarrow D, AB \rightarrow C, ECD \rightarrow F\}$.

$$X = AB \twoheadrightarrow \begin{array}{l} \bullet\ A \rightarrow E \\ \quad F \rightarrow C \\ \bullet\ B \rightarrow D \\ \bullet\ AB \rightarrow C \\ \quad ECD \rightarrow F \end{array} \xrightarrow{ABCDE} \begin{array}{l} A \rightarrow E \\ F \rightarrow C \\ B \rightarrow D \\ AB \rightarrow C \\ ECD \rightarrow F \end{array}$$

While 1 While 2

Exemple

- Soit $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \longrightarrow E, F \longrightarrow C, B \longrightarrow D, AB \longrightarrow C, ECD \longrightarrow F\}$.

$$
X = AB \quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\bullet & A \to E \\
 & F \to C \\
\bullet & B \to D \\
\bullet & AB \to C \\
 & ECD \to F
\end{array}
\quad \xrightarrow{ABCDE} \quad
\begin{array}{ll}
 & A \to E \\
 & F \to C \\
 & B \to D \\
 & AB \to C \\
\bullet & ECD \to F
\end{array}
$$

While 1 While 2

Exemple

- Soit $R = \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \rightarrow E, F \rightarrow C, B \rightarrow D, AB \rightarrow C, ECD \rightarrow F\}$.

$X = AB \longrightarrow$

While 1

- $A \rightarrow E$
- $F \rightarrow C$
- $B \rightarrow D$
- $AB \rightarrow C$
- $ECD \rightarrow F$

$\xrightarrow{ABCDE}$

While 2

- $A \rightarrow E$
- $F \rightarrow C$
- $B \rightarrow D$
- $AB \rightarrow C$
- $ECD \rightarrow F$

$\xrightarrow{ABCDEF}$

While 3

- $A \rightarrow E$
- $F \rightarrow C$
- $B \rightarrow D$
- $AB \rightarrow C$
- $ECD \rightarrow F$

Exemple

- Soit $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \rightarrow E, F \rightarrow C, B \rightarrow D, AB \rightarrow C, ECD \rightarrow F\}$.

$$
X = AB \longrightarrow
\begin{array}{ll}
\bullet & A \rightarrow E \\
 & F \rightarrow C \\
\bullet & B \rightarrow D \\
\bullet & AB \rightarrow C \\
 & ECD \rightarrow F
\end{array}
\xrightarrow{ABCDE}
\begin{array}{ll}
 & A \rightarrow E \\
 & F \rightarrow C \\
 & B \rightarrow D \\
 & AB \rightarrow C \\
\bullet & ECD \rightarrow F
\end{array}
\xrightarrow{ABCDEF}
\begin{array}{ll}
 & A \rightarrow E \\
\bullet & F \rightarrow C \\
 & B \rightarrow D \\
 & AB \rightarrow C \\
 & ECD \rightarrow F
\end{array}
$$

While 1 While 2 While 3

Exemple

- Soit $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F\}$ et $\Sigma = \{A \longrightarrow E, F \longrightarrow C, B \longrightarrow D, AB \longrightarrow C, ECD \longrightarrow F\}$.

$$X = AB \longrightarrow \begin{array}{l} A \to E \\ F \to C \\ B \to D \\ AB \to C \\ ECD \to F \end{array} \xrightarrow{ABCDE} \begin{array}{l} A \to E \\ F \to C \\ B \to D \\ AB \to C \\ ECD \to F \end{array} \xrightarrow{ABCDEF} \begin{array}{l} A \to E \\ F \to C \\ B \to D \\ AB \to C \\ ECD \to F \end{array} \longrightarrow X^{\Sigma} = ABCDEF$$

While 1   While 2   While 3

Un peu de réflexion

- Complexité de l'algo **FERMETURE** ?
- Avez-vous une idée d'amélioration ?
- Remarque : il existe d'autres algos pour calculer X^Σ.

Théorème : $\Sigma \models X \rightarrow Y$ si et seulement si $Y \subseteq X^\Sigma$.

- On peut donc (re)définir X^Σ comme suit

$$X^\Sigma = \{A \in \mathrm{R} \mid \Sigma \models X \rightarrow A\}$$

Approche syntaxique

- Deuxième approche : on construit une *preuve* pour déduire $X \rightarrow Y$ à partir de Σ en utilisant des *règles d'inférence*.
- On reprend notre exemple : À partir de $\Sigma = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$, on a déduit $A \rightarrow C$ par *transitivité* !
- Règles (assez naturelles) de raisonnement :
  - *« Si Y est inclus dans X alors X implique Y »*,
  - *« Si X implique Y et Y implique Z, alors X implique Z »*,
  - *« Si X implique Y, alors X et W impliquent Y et W »*.
- Comment marche une *preuve* ? On part de Σ, et en appliquant les règles on dérive de nouvelles DF intermédiaires, jusqu'à obtenir $X \rightarrow Y$ (si possible !).

Approche syntaxique

- *Règles d'inférence* d'Armstrong :
  I_1 *Réflexivité* : si $Y \subseteq X \subseteq \mathrm{R}$ alors $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$.

  I_2 *Augmentation* : si $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$ et $W \subseteq \mathrm{R}$ alors $\Sigma \vdash XW \rightarrow YW$.

  I_3 *Transitivité* : si $F \vdash X \rightarrow Y$ et $F \vdash Y \rightarrow Z$, alors $F \vdash X \rightarrow Z$.

Définition - Preuve

Soient Σ un ensemble de DF et $X \rightarrow Y$ une FD. Une *preuve* (ou *démonstration*) de $X \rightarrow Y$ à partir de Σ et des règles $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3\}$ est une suite finie de DF $\sigma_1, \ldots, \sigma_n = X \rightarrow Y$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a :

- soit $\sigma_i \in \Sigma$,
- soit σ_i est la conclusion d'une règle de $\mathcal{I}$ que l'on a appliquée à des DF de l'ensemble $\Sigma \cup \{\sigma_j \mid 1 \leq j < i\}$.

Si on peut trouver une preuve de $X \rightarrow Y$ à partir de Σ, on note $\Sigma \vdash X \rightarrow Y$.

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \rightarrow A, AC \rightarrow B, EF \rightarrow G, EG \rightarrow F, GF \rightarrow E, BCD \rightarrow E, ACD \rightarrow F, G \rightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \rightarrow EF$.

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \to A, AC \to B, EF \to G, EG \to F, GF \to E, BCD \to E, ACD \to F, G \to D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \to EF$.

$\sigma_1 : BCD \to E \in \Sigma$

Exemple de Preuve

- R $= \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \rightarrow A, AC \rightarrow B, EF \rightarrow G, EG \rightarrow F, GF \rightarrow E, BCD \rightarrow E, ACD \rightarrow F, G \rightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \rightarrow EF$.

$\sigma_1 : BCD \rightarrow E \in \Sigma$
$\sigma_2 : BCD \rightarrow BCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_1 : BCD \cup BCD \rightarrow BCD \cup E)$

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \rightarrow A, AC \rightarrow B, EF \rightarrow G, EG \rightarrow F, GF \rightarrow E, BCD \rightarrow E, ACD \rightarrow F, G \rightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \rightarrow EF$.

$\sigma_1 : BCD \rightarrow E \in \Sigma$
$\sigma_2 : BCD \rightarrow BCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_1 : BCD \cup BCD \rightarrow BCD \cup E)$
$\sigma_3 : B \rightarrow A \in \Sigma$

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \rightarrow A, AC \rightarrow B, EF \rightarrow G, EG \rightarrow F, GF \rightarrow E, BCD \rightarrow E, ACD \rightarrow F, G \rightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \rightarrow EF$.

$\sigma_1 : BCD \rightarrow E \in \Sigma$
$\sigma_2 : BCD \rightarrow BCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_1 : BCD \cup BCD \rightarrow BCD \cup E)$
$\sigma_3 : B \rightarrow A \in \Sigma$
$\sigma_4 : BCDE \rightarrow ABCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_3 : BCDE \cup B \rightarrow BCDE \cup A)$

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \longrightarrow A, AC \longrightarrow B, EF \longrightarrow G, EG \longrightarrow F, GF \longrightarrow E, BCD \longrightarrow E, ACD \longrightarrow F, G \longrightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \longrightarrow EF$.

$\sigma_1 : BCD \longrightarrow E \in \Sigma$
$\sigma_2 : BCD \longrightarrow BCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_1 : BCD \cup BCD \longrightarrow BCD \cup E)$
$\sigma_3 : B \longrightarrow A \in \Sigma$
$\sigma_4 : BCDE \longrightarrow ABCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_3 : BCDE \cup B \longrightarrow BCDE \cup A)$
$\sigma_5 : ACD \longrightarrow F \in \Sigma$

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \rightarrow A, AC \rightarrow B, EF \rightarrow G, EG \rightarrow F, GF \rightarrow E, BCD \rightarrow E, ACD \rightarrow F, G \rightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \rightarrow EF$.

$\sigma_1 : BCD \rightarrow E \in \Sigma$
$\sigma_2 : BCD \rightarrow BCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_1 : BCD \cup BCD \rightarrow BCD \cup E)$
$\sigma_3 : B \rightarrow A \in \Sigma$
$\sigma_4 : BCDE \rightarrow ABCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_3 : BCDE \cup B \rightarrow BCDE \cup A)$
$\sigma_5 : ACD \rightarrow F \in \Sigma$
$\sigma_6 : ABCDE \rightarrow ABCDEF \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_5)$

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \rightarrow A, AC \rightarrow B, EF \rightarrow G, EG \rightarrow F, GF \rightarrow E, BCD \rightarrow E, ACD \rightarrow F, G \rightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \rightarrow EF$.

$\sigma_1 : BCD \rightarrow E \in \Sigma$
$\sigma_2 : BCD \rightarrow BCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_1 : BCD \cup BCD \rightarrow BCD \cup E)$
$\sigma_3 : B \rightarrow A \in \Sigma$
$\sigma_4 : BCDE \rightarrow ABCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_3 : BCDE \cup B \rightarrow BCDE \cup A)$
$\sigma_5 : ACD \rightarrow F \in \Sigma$
$\sigma_6 : ABCDE \rightarrow ABCDEF \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_5)$
$\sigma_7 : ABCDEF \rightarrow EF \quad (I_1 \text{ sur } \sigma_7 : EF \subseteq ABCDEF)$

Exemple de Preuve

- $\mathrm{R} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$,
- $\Sigma = \{B \longrightarrow A, AC \longrightarrow B, EF \longrightarrow G, EG \longrightarrow F, GF \longrightarrow E, BCD \longrightarrow E, ACD \longrightarrow F, G \longrightarrow D\}$,
- Montrons que $\Sigma \vdash BCD \longrightarrow EF$.

$\sigma_1 : BCD \longrightarrow E \in \Sigma$
$\sigma_2 : BCD \longrightarrow BCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_1 : BCD \cup BCD \longrightarrow BCD \cup E)$
$\sigma_3 : B \longrightarrow A \in \Sigma$
$\sigma_4 : BCDE \longrightarrow ABCDE \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_3 : BCDE \cup B \longrightarrow BCDE \cup A)$
$\sigma_5 : ACD \longrightarrow F \in \Sigma$
$\sigma_6 : ABCDE \longrightarrow ABCDEF \quad (I_2 \text{ sur } \sigma_5)$
$\sigma_7 : ABCDEF \longrightarrow EF \quad (I_1 \text{ sur } \sigma_7 : EF \subseteq ABCDEF)$
$\sigma_8 : BCD \longrightarrow EF \quad (I_3 \text{ sur } \sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_7)$

Propriétés et implication logique

Lemme - validité de $\mathcal{I}$ (soundness)

Si $\Sigma \vdash X \to Y$, alors $\Sigma \models X \to Y$.

Lemme - complétude de $\mathcal{I}$ (completeness)

Si $\Sigma \models X \to Y$, alors $\Sigma \vdash X \to Y$.

Théorème : $\Sigma \models X \to Y$ si et seulement si $\Sigma \vdash X \to Y$. Autrement dit, $\mathcal{I}$ est un ensemble de règles *valide* et *complet* pour l'implication logique.

Résumé

J'ai des DF Σ

Résumé

J'ai des DF Σ

$\downarrow$

Est-ce que je peux en déduire $X \to Y$,

quelque soit r ?

Résumé

J'ai des DF Σ

$\downarrow$

Est-ce que je peux en déduire $X \rightarrow Y$,
quelque soit r ?

$\downarrow$

Implication Logique

Résumé

J'ai des DF Σ

$\downarrow$

Est-ce que je peux en déduire $X \rightarrow Y$,
quelque soit r ?

$\downarrow$

Implication Logique

Sémantique : algorithme de fermeture dans Σ

Syntaxique : preuve par les règles d'Armstrong

Résumé

J'ai des DF Σ

Est-ce que je peux en déduire $X \rightarrow Y$,

quelque soit r ?

Implication Logique

Sémantique : algorithme de fermeture dans Σ

$Y \subseteq X^{\Sigma}$

Syntaxique : preuve par les règles d'Armstrong

$\Sigma \vdash X \rightarrow Y$

Résumé

J'ai des DF Σ

Est-ce que je peux en déduire $X \to Y$,
quelque soit r ?

Implication Logique

Sémantique : algorithme de fermeture dans Σ

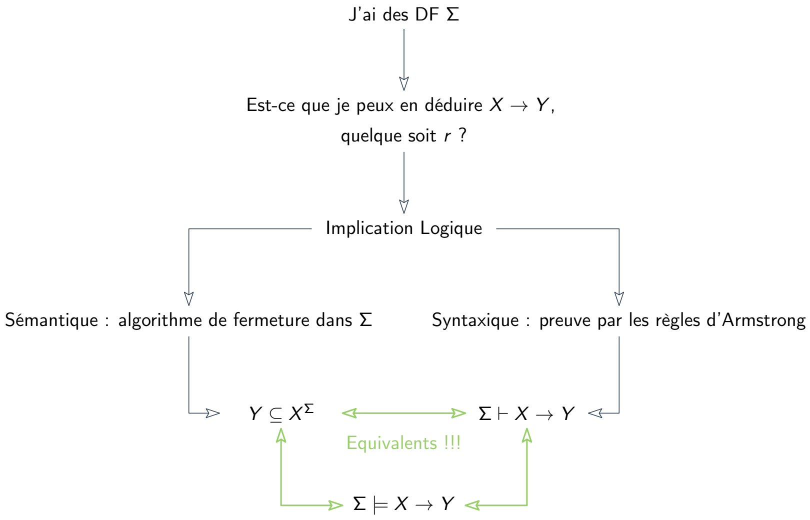
Syntaxique : preuve par les règles d'Armstrong

$Y \subseteq X^{\Sigma}$

$\Sigma \vdash X \to Y$

$\Sigma \models X \to Y$

Résumé


J'ai des DF Σ
Est-ce que je peux en déduire $X \to Y$,
quelque soit r ?
Implication Logique
Sémantique : algorithme de fermeture dans Σ
Syntaxique : preuve par les règles d'Armstrong
$Y \subseteq X^{\Sigma}$
$\Sigma \vdash X \to Y$
Equivalents !!!
$\Sigma \models X \to Y$

Fermeture d'un ensemble de DF

- À partir de Σ, on peut déduire tout un tas de connaissance :

$$\Sigma^+ = \{X \rightarrow Y \mid \Sigma \models X \rightarrow Y\}$$

  c'est la *fermeture* de Σ.
- Σ^+ peut être *exponentiel* en la taille de Σ ! Exemple si $\Sigma = \{A \rightarrow B\}$, alors

$$\Sigma^+ = \left\{ \begin{array}{lll} \emptyset \rightarrow \emptyset, & B \rightarrow \emptyset, & AB \rightarrow AB \\ A \rightarrow \emptyset, & B \rightarrow B, & \\ A \rightarrow A, & AB \rightarrow \emptyset, & \\ A \rightarrow B, & AB \rightarrow A, & \\ A \rightarrow AB, & AB \rightarrow B & \end{array} \right\}$$

- Beaucoup de redondances : par ex, DF *triviales* du type $X \rightarrow Y$, avec $Y \subseteq X$.

Comparer des ensembles de DF

- Soient
  - $\Sigma = \{AB \to CD, C \to A, D \to B, AB \to F, CD \to E\}$,
  - $\Sigma' = \{AB \to CD, C \to A, D \to B, AB \to E, CD \to F\}$,
- On a $\Sigma \models AB \to E$ et $\Sigma \models CD \to F$: pour toute DF $X \to Y$ dans Σ', $\Sigma \models X \to Y$. Donc, Σ *implique* Σ', noté $\Sigma \models \Sigma'$.
- De même, on a $\Sigma' \models \Sigma$. Ainsi, Σ et Σ' représentent la *même information*, ils sont *équivalents*.

Définition - Équivalence

Soient Σ, Σ' deux ensembles de DF. On dit que Σ et Σ' sont *équivalents* si $\Sigma \models \Sigma'$ et $\Sigma' \models \Sigma$.

Propriété : $\Sigma \equiv \Sigma'$ si et seulement si $\Sigma'^{+} = \Sigma^{+}$.

Σ et ses fermés

- Soit $\Sigma = \{AB \to C, C \to A, BC \to D\}$ sur $\mathrm{R} = \{A, B, C, D\}$.
- Si $X = AB$, alors $X^\Sigma = ABCD$.
- X ne respecte pas les contraintes de Σ, $ABCD$ si.

Définition - Fermé, ensemble des fermés

Soit Σ un ensemble de DF sur R et $X \subseteq \mathrm{R}$. On dit que X est *fermé* pour Σ quand $X = X^\Sigma$. L'ensemble des fermés de Σ est noté $\mathcal{F}_\Sigma$, soit

$$\mathcal{F}_\Sigma = \{X^\Sigma \mid X \subseteq \mathrm{R}\}$$

Quelques questions :

- Si Σ et Σ' sont deux ensembles différents de DF et que $\mathcal{F}_\Sigma = \mathcal{F}_{\Sigma'}$, quel est le lien entre Σ et Σ' ?
- Si $F_1, F_2 \in \Sigma$, quid de $F_1 \cap F_2$?

Retour sur la notion de clé

- On a l'habitude de voir une clé comme un *« identifiant »* : la valeur de la clé détermine tout le tuple.
- C'est-à-dire, Si on a $\mathrm{R} = \{A, B, C, D\}$ et que l'on sait que AB est une clé, cela signifie que dès qu'on connaît la valeur de $t[AB]$ pour un tuple t, on connaît aussi $t[CD]$.
- Du point de vue des DF : AB implique R tout entier !

Définition - Clé, Clé candidate

Soit Σ un ensemble de DF sur R et $K \subseteq \mathrm{R}$. On dit que K est une *clé* de Σ si $K^{\Sigma} = \mathrm{R}$, ou de manière équivalente $\Sigma \models K \rightarrow \mathrm{R}$. Si de plus, $\forall K' \subset K$, on a $K'^{\Sigma} \neq \mathrm{R}$, on dit alors que K est une *clé candidate*. On dénote par $\mathbb{K}_{\Sigma}$ l'ensemble des clés candidates de Σ.

Pour finir

Titre (A)	Auteur (B)	Type (C)	Pays (D)
Persépolis	Satrapi	Film	France
Leto	Serebrennikov	Film	Russie
Solaris	Tarkovski	Film	Russie
Stalker	Tarkovski	Film	Russie
Stalker	Strougatski	Livre	Russie

TABLE – Une relation œuvre (r)

Exercice :

1. Parmi les ensembles de DF suivants, trouver celui qui est satisfait dans r :
   - ▷ $\Sigma_1 = \{BC \rightarrow A, A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \rightarrow D\}$,
   - ▷ $\Sigma_2 = \{AB \rightarrow C, B \rightarrow D, C \rightarrow A, C \rightarrow D\}$,
   - ▷ $\Sigma_3 = \{AC \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow D, B \rightarrow D\}$.
2. On appelle Σ l'ensemble de DF trouvé à la question précédente.
   - ▷ Montrer de manière sémantique que $\Sigma \models AB \rightarrow CD$.
   - ▷ Montrer de manière syntaxique que $\Sigma \models AB \rightarrow CD$.
3. Calculer $\mathbb{K}_\Sigma$.